

土坡稳定极限分析上限法中的多解性分析

李亮, 于广明, 褚雪松, 路世豹, 洪勇

(青岛理工大学 土木工程学院, 青岛 266033)

摘要: 土坡稳定极限分析上限法中采用了完全塑性区假定, 即假定土坡内存在一个处处位于屈服面上的滑动体。将滑动体内部条块界面上的强度发挥系数视为优化变量, 利用功能平衡方程得到了对于给定滑动面的多个安全系数, 基于和声算法和潘家铮极值原理选择其中最大的安全系数作为该滑动面的抗滑稳定安全系数, 利用该方法对于两个典型土坡算例进行了分析, 将其结果与常规极限分析上限法结果进行了比较, 给出了完全塑性区假定对计算结果的影响。

关键词: 极限分析; 土坡稳定; 潘家铮极值原理; 安全系数

中图分类号: TU 441

文献标识码: A

Multiple solutions in upper bound limit analysis of soil slopes

LI Liang, YU Guang-ming, CHU Xue-song, LU Shi-bao, HONG Yong

(School of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China)

Abstract: The assumption of existence of total plastic zone is made in the upper bound limit analysis, i.e. there exists a sliding body satisfying yielding equation in slopes. However, the mobilized extent of inter-slice strength is taken as optimized variables in this paper; and multiple solutions can be obtained by using virtual work-energy equation. The solution which is the biggest among those multiple ones is used to assess the stability for given sliding body. Two soil slopes are analyzed using the proposed method; and the results are compared to those by general upper bound method. The effect of this assumption on the stability results is given.

Key words: limit analysis; soil slope stability; Pan's principles; factor of safety

1 引言

土坡稳定分析是岩土工程的重要研究课题之一, 常用的研究方法有极限平衡法、有限元强度折减法以及极限分析法等。极限平衡法即传统的条分法, 它通过对条间作用力或者条底作用力进行假设以使问题静定而得解, 不同的假定会得到不同的计算方法。现较常用的方法有毕肖普法^[1]和摩根斯顿-普莱斯方法^[2]。有限元强度折减法全面满足了静力许可、应变相容和应力-应变之间的本构关系, 能考虑土体的非均匀性和各向异性等复杂特性, 能够模拟边坡的施工过程, 可适用于任意复杂的边界条件。其主要计算步骤为: 对给定的土体材料参数, 利用有限元法求得边坡内部每一计算点的应力-应变以及变形, 通过不断降低土体材料的抗剪强度参数, 直至边坡达到临界破坏状态^[3]。应用极限分析法分

析土坡稳定性, 起步相对较晚。陈惠发^[4]曾对极限分析法在边坡稳定性问题中的应用进行了探讨; Donald 教授^[5]、陈祖煜研究了土质边坡塑性极限分析多楔体破坏机制, 并推导得到了上限解。该方法将滑动土体划分为一种多块体模式(通常为斜条分模式, 本文将该斜条分模式以及滑动底面统称为滑动模式), 基于摩尔-库仑破坏准则及相关流动法则, 构造一个协调位移场, 并根据虚功原理, 求出边坡安全系数的上限。常规的极限分析上限法中, 为了便于迭代安全系数, 假定滑动底面和滑动土体内部材料参数按同一比例进行折减, 即它们的强度发挥程度是一样的。本文在优化搜索算法的框架之下, 对给定的滑动体, 可以很方便地得到满足功能平衡方程的强度发挥程度组合, 并利用潘家铮极大值原理得到其抗滑稳定安全系数。通过算例分析, 比较了常规极限分析法与本文方法的区别。

2 滑动模式模拟方法

极限分析法一般采用斜条分法, 所以滑动模式不仅包括滑动体底面, 还应包括滑体内部条分模式。如图 1 所示, 以 4 个顶点 3 条块的滑动体为例, 滑动体底面由 4 个点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $D(x_4, y_4)$ 顺序连接而成, 条块界面与坡面的交点坐标分别为 (x_{2u}, y_{2u}) 、 (x_{3u}, y_{3u}) , 所以该滑动模式需要 8 个变量模拟, 即 x_1 、 x_2 、 y_2 、 x_3 、 y_3 、 x_4 、 x_{2u} 、 x_{3u} 。一般而言, x_2 、 x_3 可由式 (1) 确定, 本文仅用 6 个变量即 x_1 、 y_2 、 y_3 、 x_4 、 x_{2u} 、 x_{3u} 模拟。

$$x_i = \frac{x_4 - x_1}{3}(i-1), \quad i=2,3 \quad (1)$$

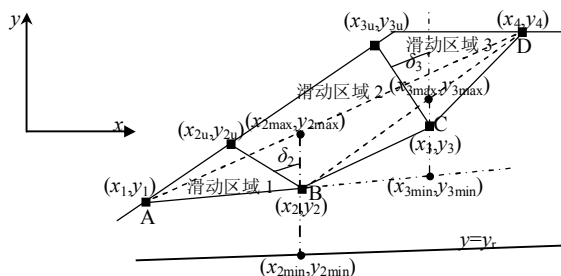


图 1 滑动模式模拟方法
Fig.1 Method for sliding modes

图 1 所描述方法采用 δ_2 、 δ_3 两个变量来定义条块界面, 定义 δ_i 为: 由 +y 向逆时针旋转至线段 $(x_{iu}, y_{iu}) - (x_i, y_i)$, $i=2,3$ 的角度, 所以可用 x_1 、 y_2 、 y_3 、 x_4 、 δ_2 、 δ_3 等 6 个变量来模拟该滑动模式, 对于由 $n+1$ 个顶点构成滑动底面而言, 该方法需要 $2n$ 个变量。滑动土体可划分为 n 个滑动区域 (如图 1 所示)。对于滑动底面, 通常采用 3 次样条函数来细化两点之间的直线段, 若设每两点之间需细分的条块数为 s , 则滑动体离散为 $N = ns$ 个条块, 有关样条函数细化的工作详见文献[6]。

3 极限分析上限法

3.1 常规方法

若将某一边坡的滑动体离散为一系列具有倾斜界面的条块, 如图 2 所示。每一条块都视为刚体, 对第 i 个条块, 其变形速率为 V_i , 与该条块底面夹角为 ϕ_{ei} , 条块底面长度记为 D_i , V_i 与 x 轴的夹角为 θ_i (从 x 正方向开始反时针旋转为正)。该楔体与下一条块的相对速度为 V_i^j , 此相对速度与该两块体的交界面的夹角为 ϕ_{ei}^j , 交界面长度为 L_i , V_i^j 与 x 轴的夹角为 θ_i^j 。内能耗散发生于该条块的底面和条块间的界面, 在条块内为 0。若滑坡体被分成 N 个条块,

因而共有 $N-1$ 个界面。设材料的抗剪强度 c_i 与 ϕ_i 指标按 F 缩减为 c_{ei} 与 ϕ_{ei} , 则边坡处于极限状态。

$$c_{ei} = c_i / F \quad (2)$$

$$\tan \phi_{ei} = \tan \phi_i / F \quad (3)$$

式中: c_i 为土体的凝聚力; ϕ_i 为土体的摩擦角; F 为安全系数。下标 e 表示相应的强度参数隐含了安全系数 F 。

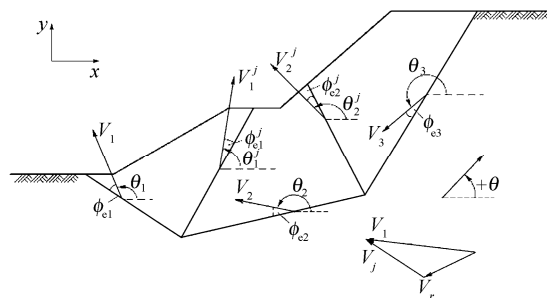


图 2 能量法计算简图
Fig.2 Illustration of energy method

设第 1 个条块的速度为 V_1 , 则第 i 个条块的速度可表示为 V_1 的函数:

$$V_i = \beta_i V_1, \quad i=2,3,\dots,N \quad (4)$$

其中:

$$\beta_i = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\sin(\alpha_k - \phi_{ek} - \theta_k^j)}{\sin(\alpha_{k+1} - \phi_{e(k+1)} - \theta_k^j)} \quad (5)$$

由功能平衡方程可得计算安全系数的公式如下:

$$\sum_{i=1}^N V_i [(c_{ei} \cos \phi_{ei} - u_i \sin \phi_{ei}) D_i - (W_i + T_{yi}) \sin(\alpha_i - \phi_{ei}) - (\eta W_i + T_{xi}) \cos(\alpha_i - \phi_{ei})] - \sum_{i=1}^{N-1} V_i^j [(c_{ei}^j \cos \phi_{ei}^j - u_i^j \sin \phi_{ei}^j) L_i] \quad (6)$$

式中: u_i 为第 i 个条块底面的孔隙水压力; u_i^j 为第 i 个条块界面上的孔隙水压力; W 为第 i 个条块的自重; η 为水平地震系数; T_{yi} 为第 i 个条块顶面作用的垂直外力; T_{xi} 为第 i 个条块顶面作用的水平外力; $\Delta \alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$; $\Delta \phi_{ei} = \phi_{e(i+1)} - \phi_{ei}$ 。可消去 V_1 , 上式仅包含一个未知量, 即隐含于 c_{ei} 和 $\tan \phi_{ei}$ 中的安全系数 F , 可通过迭代求解得到。本文称之为常规极限分析上限法。

3.2 方法 1

为了便于安全系数的迭代求解, 以上所述常规极限分析方法, 假定条底以及条间均按相同的比例进行强度折减, 而事实上边坡在发生破坏时条间的

强度发挥程度与条底是不同的。实际上,可以假定条间和条底有不同的强度折减,然后利用优化搜索算法来找到满足功能平衡方程的一组解。若规定第 i 个滑动区域的条间强度发挥程度为 η_i , 以和声搜索算法^[7]为例,将乐器 i ($i=1,2,\dots,m$) 类比于优化问题中的第 i 个设计变量 η_i , 各乐器声调的和声 $\mathbf{Q}_j$ ($j=1,2,\dots,M$) 相当于优化问题的第 j 个解向量,亦即第 j 种条间强度发挥程度组合。其中 $\mathbf{Q}_j = (q_{j1}, q_{j2}, \dots, q_{jm})$, 评价类比于目标函数(即外力功与内能耗散的差)。算法首先产生 M 个初始解(和声)放入和声记忆库(harmony memory)内,以概率 HR 在 HM 内或以概率 $1-HR$ 在 HM 外变量可能值域中搜索新解 $\mathbf{Q}_{\text{new}} = (q_{\text{new},1}, \dots, q_{\text{new},m})$ 。然后,算法以概率 PR 对新解产生局部扰动,扰动后的结果代替扰动前的结果。判断新解目标函数值是否优于 HM 内的最差解。若是,则替换最差解;否则,保持和声库不变,然后不断迭代,直至算法达到最大迭代次数 N_t 为止。算法共有 3 个参数即 HR 、 PR 、 N_t 。和声搜索算法原理简单明了,易于编程实现。

3.3 方法 3

正如上所述,满足功能平衡方程的解不只一个,可以有很多种强度折减组合满足功能平衡方程。可以利用潘家铮极大值原理来评价给定滑动面的抗滑稳定度。潘家铮极大值原理表述为^[8]:当滑坡体的滑动面确定后,则滑动面上的反力及滑坡体内的内力皆能自行调整,以发挥最大的抗滑能力。方法 3 在所有满足功能平衡方程的条间发挥程度组合中,选择条底安全系数最大的那一个组合。

4 算例

4.1 算例 1

某一均质土坡,土质参数为: $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $c = 40 \text{ kPa}$, $\phi = 20^\circ$, 剖面如图 3 所示。考虑图 3 所示滑动体,分别采用常规方法、方法 1、方法 3 对其进行了计算分析,方法 1 结果为 1.480,常规方法为 1.516,而方法 3 得到多个解,最大值为 1.559,具体如图 4 所示。由图 4 可见,方法 1 从多个满足功能平衡方程的解中选择了较小的一个安全系数,而常规方法所给出的安全系数位于散点图的中上部。基于潘家铮极大值原理选择 1.559 作为该滑动体的抗滑安全系数,由图 5 可明显看出,方法 3 的条间强度发挥程度较高,而方法 1 发挥程度较低;对图 6 所示滑动体,同样采用 3 种方法对其进行了分析,由图 7 的分析结果可见,方法 1 结果为 1.425,常规方法为 1.414,方法 3 得到了多个安全系数,最

大值为 1.511,条间强度发挥程度如图 8 所示。对于该滑动体,方法 1 选择的安全系数高于常规极限分析方法,方法 3 的结果较常规方法高出 6% 左右。

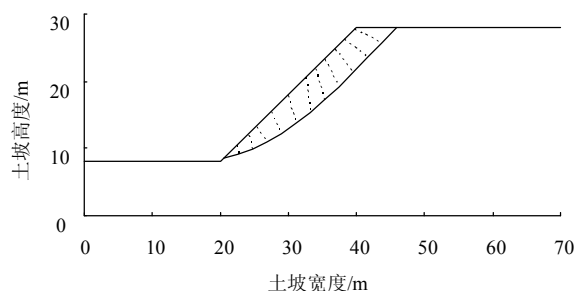


图 3 给定滑动体 1

Fig.3 Sliding body 1 to be focused on

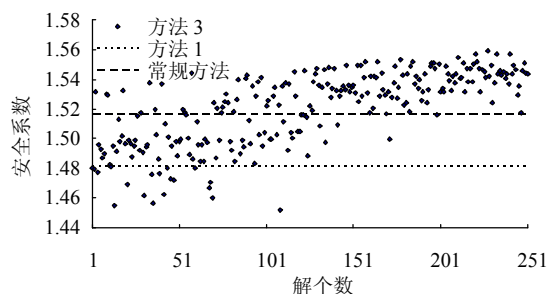


图 4 3 种方法分析结果(滑动体 1)

Fig.4 Summary of three analysis methods(sliding body 1)

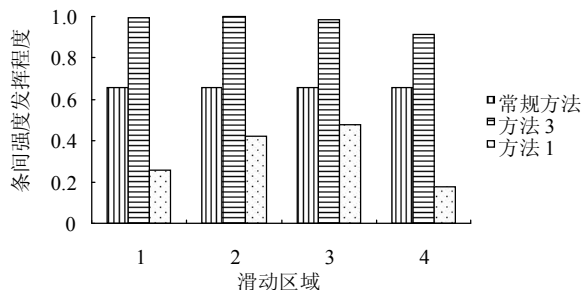


图 5 条间强度发挥程度(滑动体 1)

Fig.5 Summary of mobilized inter-slice strength coefficients(sliding body 1)

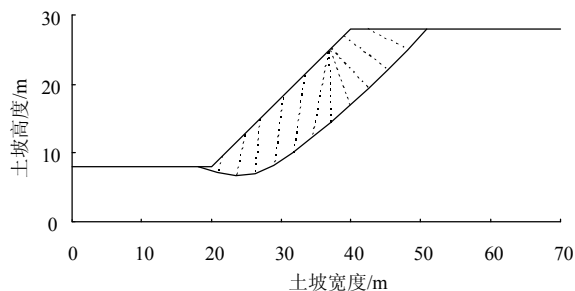


图 6 给定滑动体 2

Fig.6 Sliding body 2 to be focused on

文献[9]给出了多种极限平衡方法的计算结果(示于表 1),本文 3 种方法下所得最小安全系数同样列于表 1,对应的临界滑动面见图 9,最小安全系

数的迭代曲线如图 10 所示。由表可见, 方法 1 所得安全系数偏于保守, 较之 M-P 方法小 10 % 左右; 而常规方法所得结果为 1.303, 较之 M-P 方法高 3 % 左右; 方法 3 由于充分考虑了滑动体内部强度发挥程度的多种组合, 给出了滑动体最大可能的抗滑安全系数为 1.342。由图 11 可见, 方法 1 所得临界滑动体内部强度发挥程度较小, 而方法 3 所得结果中, 条间强度发挥程度大约在 0.9 左右。

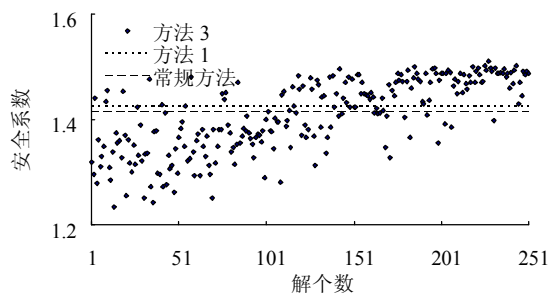


图 7 3 种方法分析结果 (滑动体 2)

Fig.7 Summary of three analysis methods(sliding body 2)

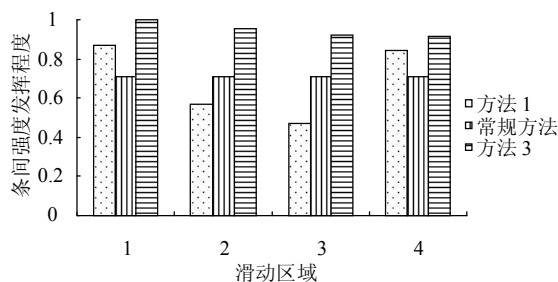


图 8 条间强度发挥程度 (滑动体 2)

Fig.8 Summary of mobilized inter-slice strength coefficients(sliding body 2)

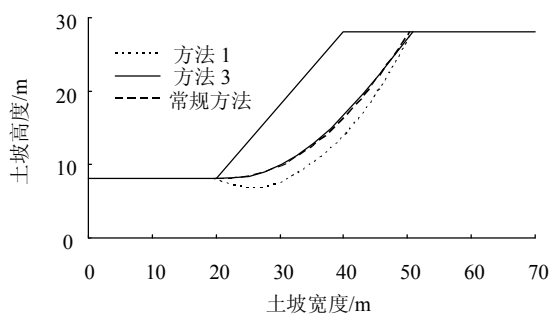


图 9 3 种方法临界滑动体比较

Fig.9 Comparison among three results

表 1 文献[9]给出的均质土坡计算结果
Table 1 Results provided by reference 9

瑞典法	BISHOP	JANBU	SPENCER	M-P	方法 1	常规方法	方法 3
1.226	1.266	1.217	1.265	1.265	1.138	1.303	1.342

4.2 算例 2

选取 Zolfaghari^[10]分析过的土坡, 其土性参数如表 2 所示, 剖面如图 12 所示。Zolfaghari 采用遗

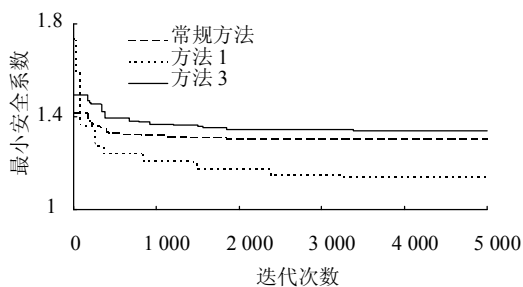


图 10 3 种方法下最小安全系数随迭代次数变化曲线

Fig.10 Curves of minimum factor of safety with iteration steps

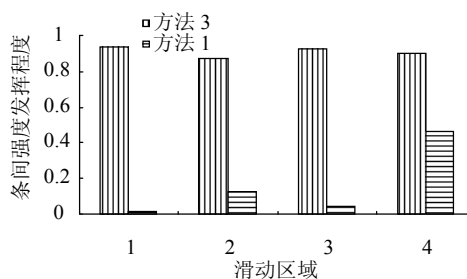


图 11 条间强度发挥程度(临界滑动体)

Fig.11 Summary of mobilized inter-slice strength coefficients for critical sliding bodies

传算法和 M-P 法求解的最小安全系数为 1.24。采用本文 3 种方法, 对该例进行了分析, 最小安全系数随迭代次数的变化曲线见图 13。由图可见, 方法 1 所得最小安全系数为 1.067, 方法 3 所得的结果为 1.208, 常规极限分析方法结果为 1.170, 所得到的临界滑动体与 Zolfaghari 的临界滑动面的比较见图 14。从图可见, 本文搜索到的滑动底面有更多的部分位于软弱层内, Zolfaghari 所得结果可能陷入局部极值, 没有搜索到最小的安全系数。临界滑动体内强度发挥程度的比较见图 15。

表 2 Zolfaghari 土坡计算参数

Table 2 Geotechnical parameters of Zolfaghari slope

土层	$\gamma / (\text{kN/m}^3)$	c / kPa	$\phi / (^\circ)$
1	19.0	15.0	20.0
2	19.0	17.0	21.0
3	19.0	5.0	10.0
4	19.0	35.0	28.0

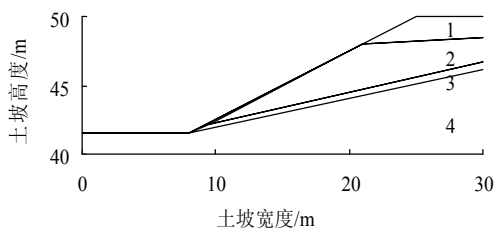


图 12 Zolfaghari 土坡剖面

Fig.12 Cross section of Zolfaghari slope

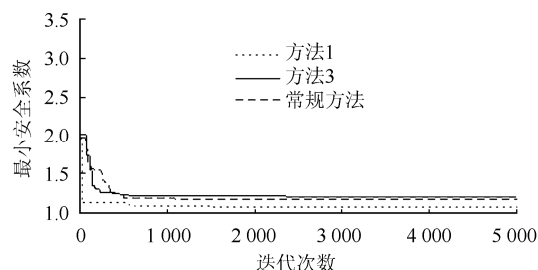


图 13 最小安全系数随迭代次数变化曲线

Fig.13 Curves of minimum factor of safety with iteration steps

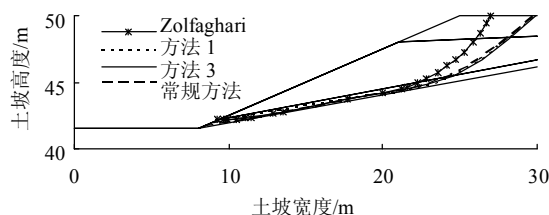


图 14 Zolfaghari 土坡临界滑动体比较

Fig.14 Comparison among three results

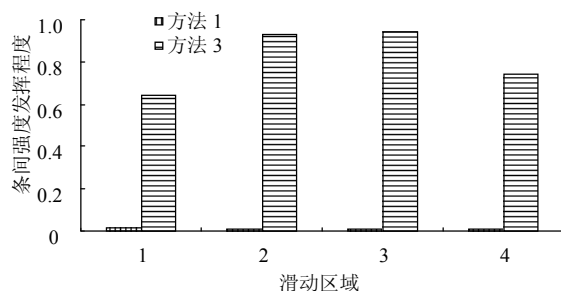


图 15 Zolfaghari 土坡条间强度发挥程度(临界滑动体)

Fig.15 Summary of mobilized inter-slice strength coefficients for critical sliding bodies

5 结 语

本文将滑动体内条块间强度发挥程度作为优化变量,利用和声搜索算法寻找到多个满足功能平衡方程的解,这与常规极限分析上限法中条底、条块内强度发挥程度一致假定不同。根据潘家铮极大值原理,通过两个算例分析表明,方法1给出偏于保

守的结果,程度大约为10%左右,而方法3的结果较之常规极限分析方法要高出3%左右。

参 考 文 献

- [1] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. *Geotechnique*, 1955, (5): 7—17.
- [2] MORGENSTERN N R, PRICE V E. The analysis of the stability of general slip surfaces[J]. *Geotechnique*, 1965, 15(1): 79—93.
- [3] ZIENKIEWICE O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. *Geotechnique*, 1975, 25(4): 671—689.
- [4] 陈惠发. 极限分析与土体塑性[M]. 北京: 人民交通出版社, 1995.
- [5] DONALD I, CHEN Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1997, 34 (11): 853—862.
- [6] 李亮, 王秋生. 样条函数模拟土坡滑动面的效率分析[J]. *岩土工程技术*, 2008, 22(3): 113—118.
- [7] GEEM Z W, KIM J H, LOGANATHAN G V. Harmony search[J]. *Simulation*, 2001, 76(2): 60—68.
- [8] 关立军. 基于强度折减的土坡稳定分析方法研究[硕士学位论文D]. 大连: 大连理工大学, 2003.
- [9] 潘家铮. 建筑物的抗滑稳定和滑坡分析[M]. 北京: 水利出版社, 1980: 25—28.
- [10] ZOLFAGHARI A R, HEATH A C, MCCOMBIE P F. Simple genetic algorithm search for critical non-circular failure surface in slope stability analysis [J]. *Computers and Geotechnics*, 2005, 32: 139—152.